PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : THÉORÈME DE FEJÉR

TONY LIMAGNE

Résumé. Pour certaines fonctions continues f, la série de Fourier de f ne converge pas ponctuellement vers f. Il est intéressant de se demander ce qui se passe lorsqu'on réalise la moyenne de Cesàro des sommes partielles de Fourier. La réponse fût apportée en 1900 lorsque Lipót Fejér démontra le théorème 3. C'est un théorème très intéressant à plusieurs titres. D'abord il s'agit d'un résultat positif de convergence ponctuelle dans la théorie des séries de Fourier qui permet, par exemple, d'établir le théorème de Weierstrass trigonométrique ou de caractériser certaines fonctions par leurs coefficients de Fourier. Ensuite, c'est le plus célèbre exemple d'une régularisation par convolution par noyaux positifs.

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 241, 235, 246, 234, 203, 201 et 209.

1. Préliminaires

On note $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques (c'est-à-dire telles que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Cet espace est muni d'une norme naturelle, définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable, on dira qu'elle est 2π-*périodique* lorsqu'elle vérifie $f(x+2\pi) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. (Si f est continue, cette condition est équivalente à celle considérée précédemment.) Pour $p \geqslant 1$, on note $\mathscr{L}^p_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques, Lebesgue-mesurables et telles que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \mathrm{d}t < +\infty.$$

Si f est une telle fonction, on notera

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On définit $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ comme le quotient de $\mathscr{L}^p_{2\pi}$ par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout ; cet espace a une structure naturelle d'espace vectoriel, et la fonction $\|\cdot\|_p$ induit une norme sur $\mathrm{L}^p_{2\pi}$. L'inégalité de Hölder implique que si $p < q$ alors on a l'inclusion naturelle $\mathrm{L}^q_{2\pi} \subseteq \mathrm{L}^p_{2\pi} \subseteq \mathrm{L}^1_{2\pi}$. On a bien sûr $\mathscr{C}_{2\pi} \subseteq \mathscr{L}^p_{2\pi}$ ce qui induit l'inclusion $\mathscr{C}_{2\pi} \subseteq \mathrm{L}^p_{2\pi}$. De plus, si $f, g \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(x - t)g(t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ si bien qu'on peut définir presque partout la quantité

$$g \star f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Date: Année 2024.

Lorsque $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{int}$ et

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e_{-n}(t) \mathrm{d}t.$$

Pour $n \geqslant 0$, on posera également

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f).$$

Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par "noyau de Fejér" d'ordre n la fonction

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=-k}^{k} e_k \right).$$

Lemme 1. La suite (K_n) est un suite régularisante de $\mathrm{L}^1_{2\pi}$. En particulier, on a

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\,\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\|K_n\|_1 = 1$.

Référence : [EA, Chap. 4, §5, Proposition 5.6(2)].

Le lemme suivant est un outil clef de la théorie des séries de Fourier : c'est le *principe de continuité des translations.*

Lemme 2. Fixons $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. L'application $\mathbb{R} \to \mathrm{L}^p_{2\pi}, a \mapsto \tau_a = f(\cdot + a)$ est continue.

Démonstration. La formule

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}, \quad \tau_{a+a'} f = \tau_a(\tau_{a'} f),$$

montre qu'il suffit de montrer la continuité en 0. Soit (a_n) un suite réelle qui converge vers 0. Supposons d'abord que f soit continue, et fixons $\epsilon > 0$. On a

$$\|\tau_{a_n} f - f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(a_n + t) - f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-\pi, 3\pi]$. Pour n assez grand, on a donc

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad |f(a_n + t) - f(t)| < \epsilon,$$

ce qui conclut. Revenons au cas général, et fixons encore $\epsilon > 0$. Comme $\mathscr{C}_{2\pi}$ est dense dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$, il existe $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ tel que $\|f - g\|_p < \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\tau_{a_n} f - f\|_p \leqslant \|\tau_{a_n} f - \tau_{a_n} g\|_p + \|\tau_{a_n} g - g\|_p + \|g - f\|_p = 2\epsilon + \|\tau_{a_n} g - g\|_p.$$

D'après le cas précédent, on a $\|\tau_{a_n} g - g\|_p < \epsilon$ pour n assez grand, ce qui conclut. $\square$

Référence : [EA, Chap. 2, §1, Théorème 1.2(2)].

2. Développement

Le théorème de Fejér est l'énoncé de convergence le plus général concernant les séries de Fourier. Il ne concerne pas les sommes partielles de Fourier $S_n(f)$ mais plutôt les "sommes de Cesàro" $\sigma_n(f)$.

Théorème 3 (Fejér)**.** (1) Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ alors, pour tout $n \geqslant 1$ on a $\sigma_n(f) \in \mathscr{C}_{2\pi}$ avec $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, et

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(2) Fixons $p \in [1, +\infty[$. Si $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ alors, pour tout $n \geqslant 1$ on a $\sigma_n(f) \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ avec $\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$, et

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(e_n \star f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-t)} f(t)\mathrm{d}t = e_n(x) \cdot c_n(f),$$

et donc

$$\sigma_n(f) = K_n \star f. \tag{R}$$

(1) Supposons f continue. Alors $\sigma_n(f)$ est aussi continu et vérifie

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty \underset{(\mathrm{R})}{\leqslant} \|K_n\|_1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) \underset{(\mathrm{R})}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_n(t)\mathrm{d}t.$$

Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-\pi, 3\pi]$: il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, t \in [-\pi, \pi], \quad |t| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x-t) - f(x)| < \epsilon,$$

et donc

$$\forall |x| \leqslant \pi, \quad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} K_n(t)\mathrm{d}t \right).$$

Lorsque $t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$ on a $\sin^2(\delta/2) \leqslant \sin^2(t/2)$ et donc

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 \leqslant \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

si bien que

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} K_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour n assez grand on a alors

$$\forall |x| \leqslant \pi, \quad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi} \left(1 + 2\|f\|_\infty\right).$$

Cette inégalité est encore valable pour $x \in \mathbb{R}$ (par périodicité), ce qui conclut.

(2) Supposons $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. L'application $\mathbb{P} = \frac{K_n}{2\pi}$ est une probabilité sur $[-\pi, \pi]$. Par l'inégalité de Hölder, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|\sigma_n(f)(x)| \underset{(\mathrm{R})}{=} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathbb{P}(\mathrm{d}t) \right| \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \mathbb{P}(\mathrm{d}t) \right)^{1/p} < +\infty.$$

Puis par le théorème de Fubini-Tonelli dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ (et non dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi], \mathcal{P}([-\pi,\pi]), \mathbb{P})$) on a

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f)\|_p^p &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t\mathrm{d}x, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p \mathrm{d}x \right) K_n(t)\mathrm{d}t, \\ &= \|f\|_p^p \cdot \|K_n\|_1 = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on trouve que

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) K_n(t)\mathrm{d}t \underset{(\mathrm{R})}{=} \sigma_n(g)(0),$$

où $g : u \mapsto \|\tau_{-u} f - f\|_p^p$. D'après le lemme 2, on a $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et ensuite par le point (1) on obtient

$$\sigma_n(g)(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(0) = 0,$$

ce qui conclut. □

Référence : [EA, Chap. 4, §6, Théorème 6.7].

Remarques 4. (1) La positivité du noyau de Fejér explique les hypothèses plus faibles du théorème de Fejér, à comparer avec le théorème de convergence normale des séries de Fourier (où des conditions sur la dérivée de la fonction sont nécessaires). Dans la preuve on a partiellement montré le lemme 1, à savoir la condition

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{|t|>\delta} |K_n(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(2) L'utilisation des sommes de Fejér permet de s'affranchir du phénomène de Gibbs au niveau des discontinuités de la fonction f. Bien qu'en général la convergence n'est pas uniforme lorsque $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$, elle est néanmoins plus régulière, comme le montre la figure [1] ci-dessous :

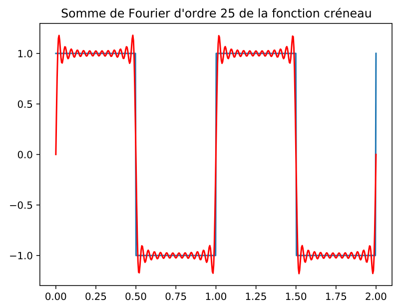
3. Quelques conséquences "classiques" du théorème de Fejér

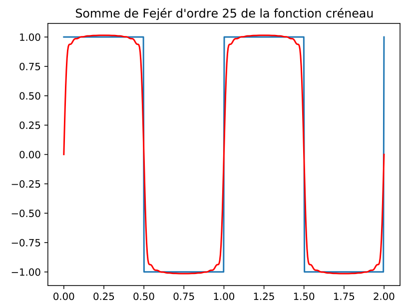
La théorie hilbertienne sur l'espace $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ garantit que toute fonction dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ est entièrement déterminée (presque partout) par ses coefficients de Fourier. Le théorème de Fejér permet d'étendre cette caractérisation.

Corollaire 5. (1) Si $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Alors $f = g$ partout sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f) = c_n(g)$.

(2) Si $f, g \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Alors $f = g$ presque partout sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f) = c_n(g)$.

1. Attention : la convention est celle pour les fonctions 1-périodiques.





Exercice 6. Soit f une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour k dans $\mathbb{Z}$, soit $c_k(f)$ le coefficient de Fourier d'indice k de f :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t.$$

On suppose que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2ik\pi x}.$$

Référence : [Sujet docteurs 2017, Problème 2, Partie I.A, question 1].

On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire (finie) sur $\mathbb{C}$ d'éléments de la famille $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple, les fonctions $\sigma_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques, d'où le

Corollaire 7 (théorème de Weiestrass "trigonométrique")**.** Les polynômes trigonométriques forment un sous-espace vectoriel dense de $(\mathscr{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$.

À noter que ce corollaire peut s'obtenir indépendamment du théorème de Fejér, à partir par exemple du théorème d'approximation de Weiestrass.

Exercice 8. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

En déduire que la suite $(n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$.

Référence : [G, Chap. 4, §6, Problème 26].

4. Annexe

Voici le code Python qui a permis de générer la figure 2 :

```
### MODULES

import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np

### Sommes de Fejér

def creneau(u):
    u = u % 1
    return -1*(1/2 < u and u <= 1) + 1*(0 <= u and u < 1/2)

t = np.linspace(0,2,500)
plt.plot(t,[creneau(i) for i in t])

def SommeFourier(n,u):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += -2/np.pi*((-1)**k-1)*np.sin(2*np.pi*k*u)/k
    return S

t = np.linspace(0,2,500)

plt.plot(t,[creneau(i) for i in t], color = 'tab:blue')
plt.plot(t,SommeFourier(25,t), color = 'r')
plt.title("Somme de Fourier d'ordre 25 de la fonction créneau")

plt.figure()

def SommeFejer(n,u):
    F = 0
    for k in range(1,n+1):
        F += 1/n * SommeFourier(k,u)
    return F

plt.plot(t,[creneau(i) for i in t],color = 'tab:blue')
plt.plot(t,SommeFejer(25,t), color = 'r')
plt.title("Somme de Fejér d'ordre 25 de la fonction créneau")

plt.show()
```

5. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

(1) Soient $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

(2) Pour $\delta > 0$ et $t \in [-\pi, \pi]$ tel que $|t| \geqslant \delta$ justifier graphiquement l'inégalité $\sin^2(\delta/2) \leqslant \sin^2(t/2)$.

(3) Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Montrer que si $\|S_n f\|_\infty \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

(4) Pourquoi a-t-on $e_n \star f(x) = e_n(x) \cdot c_n(f)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et non pour presque tout $x \in \mathbb{R}$?

Références

[EA] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mathématiques à l'Université, Ellipses, 2008[2].

[G] X. Gourdon, *Analyse*, 3^e édition, Ellipses, 2020.

[A] W. Appel, *Mathématiques pour la physique (et pour les physiciens)*, 5^e édition, H&K, 2017.

2. Attention ! Ce livre ne fait pas partie de la bibliothèque officielle du jury.